Einige nützliche Grundlagen der mikroökonomischen Theorie

1. Unbeschränkte Maximierung

Ist $z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha})$ die Zielfunktion in den endogenen Variablen $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ und den exogenen Variablen $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ und erreicht z ein Maximum an der Stelle $\boldsymbol{x}^*$ für gegebenes $\boldsymbol{\alpha}$, so muß offenbar für alle $\boldsymbol{x}$ in der Umgebung von $\boldsymbol{x}^*$

(1) $\quad z(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\alpha}) \geq z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha})$

gelten. Nun läßt sich $z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha})$ auf der rechten Seite durch die Taylor–Reihenentwicklung bis zu Gliedern erster Ordnung

(2) $\quad z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}) = z(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\alpha}) + z_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) + 0$

approximieren. Dabei ist 0 ein Fehler höherer Kleinheitsordnung, den wir zunächst vernachlässigen wollen. (2) in (1) eingesetzt ergibt dann

$$z(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\alpha}) \geq z(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\alpha}) + z_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)$$

oder, nach Kürzen, $0 \geq z_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)$, was sofort

(3) $\quad z_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\alpha}) = 0$

impliziert und damit, weniger kompakt, $\partial z(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\alpha})/\partial x_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ verlangt, weil sich sonst – also im Fall $\partial z/\partial x_i \neq 0$ für irgend ein i – immer eine Richtung finden ließe, in der z noch anwächst.

Benutzt man statt (2) die Taylor-Approximation bis zu Gliedern zweiter Ordnung

$$\begin{aligned}(4) \quad z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}) \quad = \quad & z(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\alpha}) + z_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) \\ & + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)^T z_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) + 0^2,\end{aligned}$$

wobei 0^2 für Fehler höherer Kleinheitsordnung steht, die wir wieder vernachlässigen, so erhält man durch Einsetzen in (1) zunächst

$$z(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\alpha}) \quad \geq \quad z(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\alpha}) + z_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)^T z_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*),$$

und nach Kürzen und unter Beachtung von (3)

$$\begin{aligned}(5) \quad 0 \quad \geq & \quad (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)^T z_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) \\ = & \quad \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 z(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\alpha})}{\partial x_i \partial x_j}(x_i - x_i^*)(x_j - x_j^*).\end{aligned}$$

Anders ausgedrückt, die Matrix der zweiten Ableitungen $z_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\alpha})$ muß negativ semidefinit sein. Nochmals anders ausgedrückt: z muß an der Stelle $\boldsymbol{x}^*$ schwach konkav in $\boldsymbol{x}$ sein. Die Bedingungen (3) und (5) heißen notwendige Bedingungen erster beziehungsweise zweiter Ordnung für ein Maximum.

2. Maximierung mit Nebenbedingungen in Gleichungsform

Gesucht sei das Maximum von $z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha})$ bezüglich $\boldsymbol{x}$, wobei aber $\boldsymbol{x}$ nun den Nebenbedingungen $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}) = 0$ gehorchen soll. $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$ kann eine vektorwertige Funktion sein, also $\boldsymbol{g} = (g^1, g^2, \dots, g^k)$. Man muß allerdings $k < n$ voraussetzen. Wieso? Nur $n - k$ Koordinaten von $\boldsymbol{x}$ können frei gewählt werden, da die restlichen k Koordinaten dann von "der" Nebenbedingung $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$ bestimmt werden.

Man führt nun die Hilfsvariablen $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ ein und definiert die Lagrangefunktion

$$(6) \quad L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}) = z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}) \quad \Big(= z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}) + \sum_j \lambda_j g^j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha})\Big).$$

Die notwendigen Bedingungen erster Ordnung für ein Maximum an der Stelle $\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*$ sind dann

$$\begin{aligned}
(7) \quad L_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\alpha}) &= z_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\lambda}^{*T} \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0} \\
(8) \quad L_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\alpha}) &= \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Das sind insgesamt $n+k$ Gleichungen, die bei "wohldefinierten" Problemen gerade ausreichen, die $n + k$ Unbekannten $\boldsymbol{x}^*$ und $\boldsymbol{\lambda}^*$ zu ermitteln. Jedenfalls im Prinzip. Die explizite Lösung läßt sich dagegen oft nicht ausrechnen, aber häufig interessiert sie auch gar nicht.

Selbstverständlich hängt die Lösung $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ zu (7) und (8) von den Parameterwerten, d.h. den Werten der exogenen Variablen $\boldsymbol{\alpha}$ ab. Um das deutlich zu machen, schreiben wir $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\alpha})$ und $\boldsymbol{\lambda}^* = \boldsymbol{\lambda}^*(\boldsymbol{\alpha})$. Setzt man diese nur im Prinzip bekannte Lösung $\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\alpha})$ in die Zielfunktion $z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha})$ ein, so erhält man die sogenannte *indirekte Zielfunktion*

$$(9) \quad Z(\boldsymbol{\alpha}) = z(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha}) = L(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\lambda}^*(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha}).$$

Ein Blick auf (6) in Verbindung mit (8) genügt um zu sehen, daß die zweite Gleichung in (9) stimmt. $Z(\boldsymbol{\alpha})$ oder $L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\alpha})$ geben also für jede Parameterkonstellation $\boldsymbol{\alpha}$ an, welchen Wert die Zielfunktion bestenfalls erreicht.

3. Envelope–Theorem

Für die Ableitungen der indirekten Zielfunktion gilt das Envelope-Theorem, das besagt

$$(10) \quad Z_{\boldsymbol{\alpha}}(\alpha) = L_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\alpha}),$$

d.h. die Ableitung der indirekten Zielfunktion nach einem Parameter α_i ist gleich der partiellen Ableitung der Lagrangefunktion an der Stelle $\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\alpha}$ nach diesem Parameter α_i. (10) ist schnell bewiesen: nach Definition (9) muß – Differenzierbarkeit vorausgesetzt und unter Berücksichtigung der Bedingungen erster Ordnung (7) und (8) –

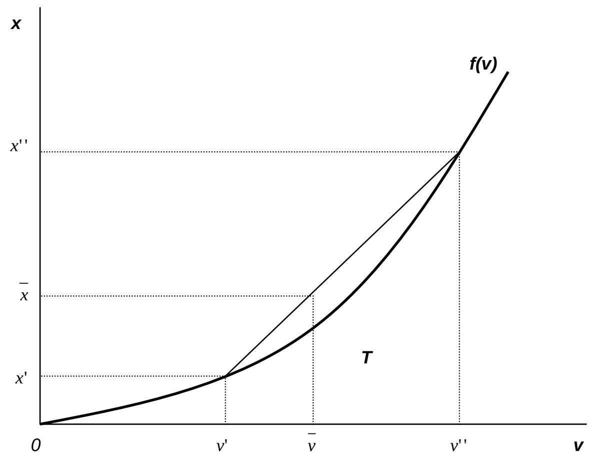
$$\begin{aligned}
(11) \quad Z_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}) &= L_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{x}^*_{\boldsymbol{\alpha}} + L_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\lambda}^*_{\boldsymbol{\alpha}} + L_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\alpha}) \\
&= L_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\alpha})
\end{aligned}$$

gelten.

Das Envelope-Theorem ist extrem nützlich, und zwar besonders dann, wenn ein Parameter α_i entweder nur in der Zielfunktion oder nur in einer Nebenbedingung vorkommt. Kommt er nur in der Zielfunktion vor, so gilt $\boldsymbol{g}_{\alpha_i} = \mathbf{0}$ und (10) reduziert sich zu $Z_{\alpha_i} = z_{\alpha_i}$. Kommt α_i nur in einer Nebenbedingung vor, z.B. der j–ten, so gilt $z_{\alpha_i} = 0$, $g_{\alpha_i}^{k \neq j} = 0$ und (10) reduziert sich zu $Z_{\alpha_i} = \lambda_j^* g_{\alpha_i}^j$. Hat g^j die spezielle Form $g^j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}) = \bar{g}(\boldsymbol{x}) + \alpha_i$, so ist $g_{\alpha_i}^j = 1$ und wir haben den speziellen Fall $Z_{\alpha_i} = \lambda_j^*$, der die Interpretation der Lagrangemultiplikatoren λ_j^* als Schattenpreise nahelegt. Merke: der aktuelle Wert $\boldsymbol{\lambda}^*$ ist eine Funktion sämtlicher Parameter.

4. Die Erlösfunktion

Wir betrachten nun eine Wirtschaft mit einem Produzenten, der Mengenanpasser ist, über eine Faktorausstattung $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_m)$ verfügt und mit Hilfe einer konvexen Technologie T ein Güterbündel $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ herstellen kann. Konvexe Technologie heißt folgendes: sind $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{v}')$ und $(\boldsymbol{x}'', \boldsymbol{v}'')$ zulässige Output–Input Kombinationen, so ist auch die konvexe Kombination $(\bar{\boldsymbol{x}} = \beta \boldsymbol{x}' + (1-\beta)\boldsymbol{x}'',\ \bar{\boldsymbol{v}} = \beta \boldsymbol{v}' + (1-\beta)\boldsymbol{v}'')$ mit $0 \leq \beta \leq 1$ zulässig. Diese Annahme umfaßt viele Arten von Technologien, jedoch nicht *zunehmende* Skalenerträge. Beispiel:



T sei die gesamte Fläche unterhalb und "auf" der Produktionsfunktion $f(v)$. $(x', v') \in T$ und $(x'', v'') \in T$. Jedoch ist $(\bar{x}, \bar{v})$ nicht zulässig. Diese Produktionsfunktion mit zunehmenden Grenzerträgen ($f_{vv} > 0$) muß also ausgeschlossen werden; d.h. das Beispiel zeigt eine nicht–konvexe Technologie.

Wir betrachten nun die Erlösfunktion, die definiert ist als

$$
\begin{aligned}
(12)\quad r(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}) &= \max_{\boldsymbol{x}} \{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x} | (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) \in T\} \\
&= \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}) \qquad \Big(= \sum_{i=1}^{n} p_i x_i(p_1, \ldots, p_n,\ v_1, \ldots, v_m)\Big)
\end{aligned}
$$

Es ist klar, daß das erlösmaximierende $\boldsymbol{x}$ von allen Parametern – hier $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{v}$ – abhängt. Wir deuten das durch die Schreibweise $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})$ an. Uns interessieren nun die Eigenschaften der Erlösfunktion $r(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})$ bezüglich der Preise $\boldsymbol{p}$ und der Faktorbestände $\boldsymbol{v}$. Zunächst halten wir $\boldsymbol{v}$ fest.

1. $r(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})$ ist konvex bezüglich $\boldsymbol{p}$. Wir zeigen das heuristisch. Sei $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{v})$ die

erlösmaximierende Wahl bei den Preisen $\boldsymbol{p}'$. Die Output–Input–Kombination $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{v})$ ist also zulässig. Anders ausgedrückt, $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{v})$ ist zulässig auch bei einem anderen $\boldsymbol{p}$. Folglich läßt sich bei einem anderen $\boldsymbol{p}$ immer der Erlös $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}' = \sum p_i x_i'$ erzielen. Für allgemeines $\boldsymbol{p}$ muß also $r(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}) \geq \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}'$ gelten, mit Gleichheit, wenn $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$ gilt, denn $r(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}'$. Anders ausgedrückt, die Differenz

$$d = r(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}' \geq 0$$

erreicht ihr Minimum – nämlich den Wert Null – bezüglich $\boldsymbol{p}$ an der Stelle $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$. Die Bedingungen erster Ordnung für ein (unbeschränktes) Minimum von d verlangen

$$(13) \quad d_{\boldsymbol{p}} = r_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{x}' = 0$$

und die Bedingungen zweiter Ordnung verlangen

$$(14) \quad d_{\boldsymbol{pp}} = r_{\boldsymbol{pp}}(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{v}) \quad \text{ist positiv semi-definit.}$$

Anders ausgedrückt, $r(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})$ ist konvex bezüglich $\boldsymbol{p}$. (Bei einer konvexen Funktion ist die Matrix der zweiten Ableitungen positiv semi-definit).

2. $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}) = r_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})$. D.h. das erlösmaximierende Güterbündel $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})$ ist gleich der Ableitung der Erlösfunktion nach p. Dies folgt unmittelbar aus (13), denn (13) gilt für jedes $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{v})$ und somit für jedes $\boldsymbol{p}'$. Dieses Ergebnis ist identisch mit dem, was das Envelope–Theorem besagt. Merke: $r(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})$ ist die indirekte Zielfunktion des Erlösmaximierungsproblems mit der Zielfunktion $z = \sum p_i x_i$ und Nebenbedingungen technologischer Natur, in denen die p_i nicht vorkommen.

3. $x_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}) = r_{\boldsymbol{pp}}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})$. D.h. die Reaktionsmatrix $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{p}}$ ist positiv semidefinit. Das folgt unmittelbar aus (e) unter Beachtung von (d). Mit $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{p}}$ positiv semidefinit gilt insbesondere $\partial x_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})/\partial p_i \geq 0$, d.h. Angebotsfunktionen fallen nicht.

4. Dieses Ergebnis gilt auch global, d.h. für nicht- marginale Preisänderungen: Seien $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{v})$ und $\boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}'', \boldsymbol{v})$ die erlösmaximierenden Outputbündel für die Preise $\boldsymbol{p}'$ bzw. $\boldsymbol{p}''$. Dann gilt also

$$r(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}' \geq \boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}'' \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{p}'(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}'') \geq 0$$

und

$$r(\boldsymbol{p}'', \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{p}''\boldsymbol{x}'' \quad \geq \quad \boldsymbol{p}''\boldsymbol{x}' \quad \rightarrow \quad -\boldsymbol{p}''(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}'') \geq 0.$$

Addition dieser beiden Ungleichungen ergibt sofort

$$(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}'')(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}'') \quad \geq \quad 0,$$

oder, weniger kompakt, $\Sigma_i(p_i' - p_i'')(x_i' - x_i'') \geq 0$, d.h. Preis- und Mengenänderungen sind positiv korreliert. Setzt man $\boldsymbol{p}'$ und $\boldsymbol{p}''$ so fest, daß $p_i' - p_i'' = 0$ für alle $i \neq j$ gilt, so bleibt $(p_j' - p_j'')(x_j' - x_j'') \geq 0$. Ändert sich also nur der Preis p_j, so bewegt sich das Angebot x_j in dieselbe Richtung.

5. Die Erlösfunktion $r(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})$ ist linear-homogen ("homogen vom Grad 1") in den Preisen, d.h. $r(\gamma \boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}) = \gamma r(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})$ für $\gamma > 0$. D.h. ändern sich die Preise allesamt proportional, so ändert sich auch der maximale Erlös um diesen Proportionalitätsfaktor γ. Hier erheben sich zwei Fragen: 1) Stimmt die Aussage? 2) Was heißt "Homogenität"?

   Zunächst der Beweis: Wir betrachten die Preise $\boldsymbol{p}'$ und $\boldsymbol{p}''$, wobei $\boldsymbol{p}'' = \gamma \boldsymbol{p}'$ gelten soll. Seien $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{v})$ und $\boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}'', \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{x}(\gamma \boldsymbol{p}', \boldsymbol{v})$. Dann gilt

$$
\begin{array}{llll}
(15) & r(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{v}) & = & \boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}' \geq \boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}'' \\
(16) & r(\boldsymbol{p}'', \boldsymbol{v}) & = & \boldsymbol{p}''\boldsymbol{x}'' \geq \boldsymbol{p}''\boldsymbol{x}', \quad \text{also } \gamma \boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}'' \geq \gamma \boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}' \rightarrow \boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}'' \geq \boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}'.
\end{array}
$$

   (15) und (16) widersprechen sich, sofern nicht $\boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}''$ gilt. Aus Konsistenzgründen muß demnach $\boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}''$ gelten und somit gilt auch $\gamma \boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}' = \gamma \boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}''$ oder $(\gamma)\boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}' = (\gamma \boldsymbol{p}')\boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{p}''\boldsymbol{x}''$ und somit $\gamma r(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{v}) = r(\gamma \boldsymbol{p}', \boldsymbol{v})$. D.h. die Aussage stimmt.

   Und nun zu den Eigenschaften homogener Funktionen: Eine Funktion $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ heißt homogen vom Grad h in ihren Argumenten $\boldsymbol{x}$, wenn

$$
(17) \quad g(\gamma \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \; = \; \gamma^h g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \quad \text{für jede beliebige Zahl } \gamma > 0
$$

   gilt. Ist $h = 1$, so heißt g linear-homogen in $\boldsymbol{x}$.

   Welche Eigenschaften hat eine homogene Funktion? Differenzieren wir beide Seiten von (17) nach γ, erhalten wir zunächst

$$
(18) \quad \frac{\partial g(\gamma \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial(\gamma \boldsymbol{x})} \boldsymbol{x} = h\gamma^{h-1} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),
$$

   und setzen wir nun $\gamma = 1$, erhalten wir das zentrale Ergebnis

$$
(19) \quad \frac{\partial g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial x} \boldsymbol{x} = h g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),
$$

   das oft als Eulers Theorem bezeichnet wird.

   Differenzieren wir (17) nach $\boldsymbol{x}$, so erhalten wir zunächst

$$
(20) \quad \frac{\partial g(\gamma \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial(\gamma \boldsymbol{x})} \gamma = \gamma^h \frac{\partial g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{x}},
$$

   und schreiben wir dann $\boldsymbol{z} = \gamma \boldsymbol{x}$, so wird daraus

$$
(21) \quad \frac{\partial g(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{z}} = \gamma^{h-1} \frac{\partial g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{x}},
$$

   was bedeutet, daß die Ableitungen einer homogenen Funktion vom Grade h selbst homogen vom Grad $h - 1$ sind. Speziell für linear-homogene Funktionen ($h = 1$) gilt also, daß deren Ableitungen homogen vom Grad Null sind. D.h. sie sind an der Stelle $\boldsymbol{x}$ und $\gamma \boldsymbol{x}$ identisch.

   Schließlich wird oft noch eine weitere Eigenschaft homogener Funktionen benutzt: Bildet man die zweiten kreuzweisen Ableitungen von (17) – indem man (18) nach $\boldsymbol{x}$ oder (20) nach γ differenziert – so erhält man zunächst

$$
\frac{\partial^2 g(\gamma \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial(\gamma \boldsymbol{x})^2} \gamma \boldsymbol{x} + \frac{\partial g(\gamma \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial(\gamma \boldsymbol{x})} = h\gamma^{h-1} \frac{\partial g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{x}},
$$

woraus an der Stelle $\gamma = 1$ nach geringfügiger Umstellung

$$(22) \quad \frac{\partial^2 g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{x}^2}\boldsymbol{x} = (h-1)\frac{\partial g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{x}}$$

folgt. Für linear-homogene Funktionen ($h = 1$) heißt das insbesondere, daß die rechte Seite von (22) verschwindet.

Auf die Erlösfunktion angewendet bedeutet dies:

5.1 $r_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{p} = r(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})$ oder $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{p} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})$, was nicht sonderlich erstaunt;

5.2 $r_{\boldsymbol{p}}(\gamma\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}) = r_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})$, oder $\boldsymbol{x}(\gamma\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})$, d.h., die erlösmaximierende Outputkombination ändert sich nicht, wenn alle Outputpreise um den Faktor γ proportional verändert werden;

5.3 $r_{\boldsymbol{pp}}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$, oder $x_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$, d.h. technisch: die Reaktionsmatrix $\boldsymbol{x_p}$, die gemäß 3. positiv semi-definit ist, ist singulär. Weniger kompakt geschrieben heißt dies $\sum_j p_j \partial x_i / \partial p_j = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Da nun $\partial x_i / \partial p_i \geq 0$ ist (wegen der Positiv-Semidefinitheit), muß für mindestens einen Term $\partial x_i / \partial p_{j \neq i}$ in der Summe das Vorzeichen ≤ 0 gelten. D.h. die Kreuzpreiselastizitäten eines beliebigen angebotenen Gutes i können nicht allesamt positiv sein.

Wir halten nun $\boldsymbol{p}$ fest und fragen nach den Eigenschaften der Erlösfunktion bezüglich $\boldsymbol{v}$.

6. $r(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})$ ist konkav in $\boldsymbol{v}$. Wieso? Wir betrachten zwei beliebige Ausstattungen $\boldsymbol{v}'$ und $\boldsymbol{v}''$ und die zugehörigen erlösmaximierenden Produktionsentscheidungen $\boldsymbol{x}'$ bzw. $\boldsymbol{x}''$. Also $r(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}') = \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}'$ und $r(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}'') = \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}''$. Betrachten wir nun irgendeine Ausstattung $\boldsymbol{v}''' = \beta\boldsymbol{v}' + (1-\beta)\boldsymbol{v}''$. Mit dieser Ausstattung läßt sich der Output $\bar{\boldsymbol{x}} = \beta\boldsymbol{x}' + (1-\beta)\boldsymbol{x}''$ herstellen, denn die Technologie ist annahmegemäß konvex. Ob allerdings $\bar{\boldsymbol{x}}$ die erlösmaximierende Outputkombination ist, bleibt fraglich. Folglich gilt

$$\begin{aligned} r(\boldsymbol{p}, \beta\boldsymbol{v}' + (1-\beta)\boldsymbol{v}'') &= (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}''') && \text{(Definition von } \boldsymbol{v}'''\text{)} \\ &\geq \boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{x}} && (\bar{\boldsymbol{x}} \text{ ist zul. bei Bestand } \boldsymbol{v}''') \\ &= \boldsymbol{p}\beta\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{p}(1-\beta)\boldsymbol{x}'' && \text{(Definition von } \bar{\boldsymbol{x}}\text{)} \\ &= \beta\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}' + (1-\beta)\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}'' \\ &= \beta r(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}') + (1-\beta) r(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}'') \end{aligned}$$

D.h. wir haben $r(\boldsymbol{p}, \beta\boldsymbol{v}' + (1-\beta)\boldsymbol{v}'') \geq \beta r(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}') + (1-\beta) r(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}'')$, und das ist nichts als eine alternative Charakterisierung einer konkaven Funktion (in $\boldsymbol{v}$). Anders ausgedrückt, $r_{\boldsymbol{vv}}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})$ muß negativ semidefinit sein. Folgende Zeichnung hilft:

T sei wieder die gesamte Fläche unter der Produktionsfunktion. Diesmal ist T eine konvexe Menge. Mit v''' läßt sich offenbar $\bar{x}$ herstellen. $\bar{x}$ ist aber nicht der maximale Output für v''' und erzeugt daher auch nicht den maximalen Erlös.

Die Erlösfunktion ist hier schlicht $r(p, v) = pf(v)$; sie hat also die gleiche Gestalt wie $f(v)$, nur sind die Ordinatenwerte jeweils um den festen Faktor p aufgeblasen (oder geschrumpft, wenn $p < 1$ gilt).

7. $r_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})$, wobei $\boldsymbol{w}$ die in Einheiten der Erlösfunktion ausgedrückten Schattenpreise der Faktorbestände $\boldsymbol{v}$ sind. Das ist der Erlösfunktion (6) nicht direkt anzusehen, folgt aber aus dem Envelope–Theorem. Das Envelope–Theorem gemäß (5) besagt auf $r(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})$ angewendet – merke: $r(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})$ ist eine indirekte Zielfunktion – daß $r_{\boldsymbol{v}} = L_{\boldsymbol{v}}$ gilt, wobei L die zugehörige Lagrangefunktion ist. Wie sieht nun L hier aus? Oder zunächst, wie sieht das vollständige Maximierungsproblem aus? Man kann sich folgendes vorstellen:

$$\max_{x_1,\ldots,x_n,v_1^1,\ldots,v_m^1,\ldots,\ldots,v_m^n} \quad \sum_i p_i x_i$$

unter den beiden Nebenbedingungen

$$x_i \leq f^i(v_1^i \ldots, v_m^i), \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$v_j \geq \Sigma_i v_j^i, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Hier sind v_j^i die Menge von Faktor j, die in der Produktion des Gutes i eingesetzt wird, und $f^i(\ldots)$ die Produktionsfunktionen. Die beiden Gruppen von Nebenbedingungen sagen: Man kann nicht mehr herstellen (und verkaufen), als die Produktionsfunktion bei gewähltem Faktorinput $(v_1^i, \ldots, v_m^i)$ erlaubt, und man kann nicht mehr für alle Produktionen einsetzen, als insgesamt vom einzelnen Faktor vorhanden ist. Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß kein Faktor im Überfluß vorhanden ist (d.h. keines Faktors Grenzprodukt wird Null), und daß kein möglicher Output verschlampt wird, daß also beide Gruppen von Nebenbedingungen bindend sind, so sieht die Lagrangefunktion dieses Erlösmaximierungsproblems folgendermaßen aus:

$$L = \sum_i p_i x_i + \sum_i \mu_i \Big(x_i - f^i(v_1^i, \ldots v_m^i)\Big) + \sum_j \lambda_j \Big(v_j - \sum_i v_j^i\Big).$$

Folglich gilt – weil v_j nur in der j-ten Nebenbedingung der zweiten Gruppe vorkommt – $\partial L/\partial v_j = \lambda_j$. Also ist – Envelope-Theorem! – $r_{v_j}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}) = \partial L/\partial v_j = \lambda_j(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})$. Die Argumentenliste wurde hier explizit angehängt, denn gemäß Envelope-Theorem ist die Ableitung an der Stelle $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$, also im Optimum zu bilden, und die wäre hier also λ_j^* und hinge somit von allen Parametern des Problems – hier $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}$ – ab.

Oben haben wir kurzerhand $r_{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{w}$ geschrieben und $\boldsymbol{w}$ als Schattenpreisvektor bezeichnet. Daß w_j $(= \lambda_j^*)$ tatsächlich die Interpretation eines Schattenpreises zukommt, zeigt sich hier nochmals. Laut Envelope-Theorem ändert sich der maximale Erlös (= indirekte Zielfunktion) genau um λ_j^*, wenn der Bestand des Faktors v_j marginal erhöht wird. λ_j^* ist also der Geldbetrag, den der Erlösmaximierer gerade noch für eine zusätzliche marginale Einheit dieses Faktors zu zahlen gewillt wäre.

8. $\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}) = r_{\boldsymbol{vv}}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})$ ist negativ semi-definit. Das folgt aus $\boldsymbol{w} = r_{\boldsymbol{v}}$ (siehe 7.) und $r_{\boldsymbol{vv}}$ ist negativ semi-definit (siehe 6.) und bedeutet insbesondere $\partial w_i/\partial v_i \leq 0$ für alle i; der Schattenpreis eines Faktors sinkt tendenziell, je mehr davon zur Verfügung steht.

Bleibt schließlich noch eine schwer verständliche Über-Kreuz-Eigenschaft festzuhalten, die in ähnlicher Form als sogenannte Reziprozitätsrelation immer wieder auftritt und eine der nicht auf Anhieb sichtbaren und auch intuitiv schwer verständlichen Konsequenzen optimierenden Verhaltens ist:

9. $\boldsymbol{w_p}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{x}^T_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})$. D.h. explizit $\partial w_i / \partial p_j = \partial x_j / \partial v_i$ für alle i, j und besagt, daß der Schattenpreis des Faktors i mit dem Preis des Gutes j steigt oder fällt, je nachdem ob der Output des Gutes j mit dem Bestand an Faktor i steigt bzw. fällt. (Beweis: $\boldsymbol{w_p} = r_{\boldsymbol{vp}}$; $\boldsymbol{x_v} = r_{\boldsymbol{pv}}$; aufgrund der Invarianz der Reihenfolge zweiter Ableitungen gilt $r_{\boldsymbol{vp}} = r^T_{\boldsymbol{pv}}$)

5. Die Profitfunktion – zur Übung

Die Profitfunktion ist definiert als:

$$(23) \quad \pi(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{w}) \quad = \quad \max_{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}} \quad \{\boldsymbol{px} - \boldsymbol{wv} | (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) \in T\} = \boldsymbol{px}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{w}) - \boldsymbol{wv}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{w}).$$

Hier sind nun die Outputs $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ und die Inputs $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_m)$ die Entscheidungsvariablen und die Güterpreise $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ und die Faktorpreise $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ die exogenen Variablen.

Zeigen Sie in völliger Analogie zu den Überlegungen des letzten Abschnitts, daß die Profitfunktion linear–homogen in allen Preisen $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{w})$ ist, daß sie konvex in *allen* Preisen $\boldsymbol{p}$ *und* $\boldsymbol{w}$ ist, daß $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{w}) = \pi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{w})$ und $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{w}) = -\pi_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{w})$ gilt, daß ferner $\boldsymbol{x_p}$ positiv semidefinit und $\boldsymbol{v_w}$ negativ semidefinit sein und daß die Reziprozitätsrelationen $\boldsymbol{x_w} = -\boldsymbol{v}^T_{\boldsymbol{p}}$ (also $\partial x_i / \partial w_j = -\partial v_j / \partial p_i$) gelten müssen.

6. Die Kostenfunktion

Wir betrachten das Kostenminimierungsproblem eines Produzenten, der den Output x^j mit Hilfe von Inputs $v^j_1, \ldots, v^j_m$ herstellt, gegebene Faktorpreise $w_1, \ldots, w_m$ vorfindet und nicht mehr herstellen kann, als die Produktionsfunktion $f^j(v^j_1, \ldots, v^j_m)$ erlaubt. Zur Vereinfachung der Schreibweise unterdrücken wir die Kopfindizes und benutzen für die Inputs die Vektorschreibweise $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots)$ und schreiben für die Faktorpreise $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots)$. Die Kostenfunktion ist definiert als

$$(24) \quad c(\boldsymbol{w}, x) = \min_{\boldsymbol{v}} \{\boldsymbol{wv} | f(\boldsymbol{v}) \geq x\} = \boldsymbol{wv}(\boldsymbol{w}, x).$$

Die uns interessierenden Eigenschaften der Kostenfunktion sind

1. $c(\boldsymbol{w}, x)$ ist konkav in $\boldsymbol{w}$. Der Beweis ist genau wie der zu Punkt 1. im Abschnitt über die Erlösfunktion. Also, sei $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{w}', x)$ das kostenminimierende Inputbündel bei den Preisen $\boldsymbol{w}'$. Ändern sich nun die Inputpreise auf $\boldsymbol{w}$, so könnte man weiterhin x mit der Kombination $\boldsymbol{v}'$ erzeugen. Die Kosten beliefen sich dann auf $\boldsymbol{wv}'$, wären aber nicht unbedingt minimal. Folglich muß gelten $c(\boldsymbol{w}, x) \leq \boldsymbol{wv}'$ oder $d = c(\boldsymbol{w}, x) - \boldsymbol{wv}' \leq 0$. Diese Differenz d nimmt bei den Preisen $\boldsymbol{w}'$ den Wert Null an, denn $\boldsymbol{v}'$ ist optimal für $\boldsymbol{w}'$, d.h. $c(\boldsymbol{w}', x) = \boldsymbol{w}'\boldsymbol{v}'$ nach Konstruktion von $\boldsymbol{v}'$. Also, die Differenz d erreicht ihr Maximum (den Wert Null) an der Stelle $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}'$. Die Bedingungen

erster und zweiter Ordnung für ein Maximum verlangen

$$\begin{aligned}
(25) \quad d_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{w}', x) &= c_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{w}', x) - \boldsymbol{v}' = \mathbf{0}, \\
(26) \quad d_{\boldsymbol{ww}}(\boldsymbol{w}', x) &= c_{\boldsymbol{ww}}(\boldsymbol{w}', x) \quad \text{ist negativ semi-definit.}
\end{aligned}$$

Da diese Argumentation für jedes $\boldsymbol{w}'$ wiederholt werden kann, ist also gemäß (26) $c_{\boldsymbol{ww}}(\boldsymbol{w}, x)$ negativ semi-definit (Konkavität bezüglich $\boldsymbol{w}$) und gemäß (25) gilt dann:

2. $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{w}, x) = c_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{w}, x)$. Die optimale Inputentscheidung $\boldsymbol{v}'$ erhält man als Ableitung der Kostenfunktion nach $\boldsymbol{w}$ an der Stelle $(\boldsymbol{w}', x)$; siehe nochmals (25). Wegen $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{w}, x) = c_{\boldsymbol{ww}}(\boldsymbol{w}, p)$ und $c_{\boldsymbol{ww}}$ negativ semi-definit muß natürlich auch $v_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{w}, x)$ negativ semi-definit sein. Somit gilt speziell $\partial v_i / \partial w_i \leq 0$, d.h. die kostenminimierende (oder "bedingte") Faktornachfrage steigt nicht mit dem eigenen Faktorpreis.

3. Die Kostenfunktion ist linear–homogen in den Faktorpreisen, d.h. es gilt $c(\gamma \boldsymbol{w}, x) = \gamma c(\boldsymbol{w}, x)$. (Vgl. die analoge Argumentation in Abschnitt 4).

4. Ist die Produktionsfunktion $f(\boldsymbol{v})$ linear–homogen, d.h. gilt $f(\gamma \boldsymbol{v}) = \gamma f(\boldsymbol{v})$, so ist die Kostenfunktion separabel, d.h. es gilt

   $$(27) \quad c(\boldsymbol{w}, x) = x c(\boldsymbol{w}, 1).$$

   Anders ausgedrückt: kennt man die Minimalkosten für die Herstellung der Outputmenge $x = 1$, so erhält man die Minimalkosten für beliebiges x einfach durch Multiplikation mit der jeweiligen Menge x.

   Bevor wir auf die Konsequenzen der Separabilität der Kostenfunktion eingehen, wollen wir uns überlegen, wieso (27) gelten muß. Wir weisen dies nach, indem wir zeigen, daß weder $c(\boldsymbol{w}, x) > x c(\boldsymbol{w}, 1)$ noch $c(\boldsymbol{w}, x) < x c(\boldsymbol{w}, 1)$ gelten kann.

   ad $c(\boldsymbol{w}, x) > x c(\boldsymbol{w}, 1)$: Wir bezeichnen mit $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ sämtliche Inputkombinationen, die die Outputmenge 1 erzeugen. $f(\boldsymbol{a}) = 1$ definiert also die Isoquante im Inputraum für die Outputmenge $x = 1$. Sei $\boldsymbol{a}^*(\boldsymbol{w})$ die kostenminimierende Inputwahl bei den Faktorpreisen $\boldsymbol{w}$ zur Herstellung der Menge $x = 1$. Also ist $c(\boldsymbol{w}, 1) = \boldsymbol{w}\boldsymbol{a}^*(\boldsymbol{w})$, und es gilt zugleich nach Konstruktion $f(\boldsymbol{a}^*(\boldsymbol{w})) = 1$. Steigern wir nun alle Inputmengen auf den Wert $x\boldsymbol{a}^*(\boldsymbol{w})$, so steigt der Output auf die Menge x, denn f ist linear–homogen und somit gilt $f(x\boldsymbol{a}^*) = x f(\boldsymbol{a}^*) = x$. Die Kosten würden dabei dann auf $\boldsymbol{w}(x\boldsymbol{a}^*(\boldsymbol{w})) = x\boldsymbol{w}\boldsymbol{a}^*(\boldsymbol{w}) = x c(\boldsymbol{w}, 1)$ steigen. Folglich kann nicht stimmen, daß die minimalen Kosten $c(\boldsymbol{w}, x)$ größer als $x c(\boldsymbol{w}, 1)$ sind.

   ad $c(\boldsymbol{w}, x) < x c(\boldsymbol{w}, 1)$: Hier brauchen wir die Argumentation nur umzukehren. Seien $\boldsymbol{b}^*(\boldsymbol{w})$ die kostenminimalen Inputs bei den Preisen $\boldsymbol{w}$ zur Herstellung des Outputs x. Reduzieren wir diese Inputmenge auf ein x-tel (also auf $\boldsymbol{b}^*/x$), so fällt der Output auf genau ein x-tel (also auf 1), und die Kosten reduzieren sich ebenfalls auf ein x-tel (also $c(\boldsymbol{w}, x)/x$). Die Outputmenge 1 ist also mit den Kosten $c(\boldsymbol{w}, x)/x$ herstellbar. Demnach kann nicht $c(\boldsymbol{w}, x)/x < c(\boldsymbol{w}, 1)$ gelten und somit kann auch der Fall $c(\boldsymbol{w}, x) < x c(\boldsymbol{w}, 1)$ nicht eintreten. Es muß also (27) gelten.

Die Konsequenzen von (27) sind nun

4a. $c_x(\boldsymbol{w}, x) = c(\boldsymbol{w}, 1)$. D.h. die Grenzkosten sind unabhängig von der Ausbringungsmenge x und hängen nur von den Faktorpreisen ab.

4b. $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{w},x) = xc_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{w},1)$. Denn gemäß 2. gilt allgemein $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{w},x) = c_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{w},x)$. D.h. hier also, daß die kostenminimalen Inputmengen direkt proportional den Inputmengen bei der Herstellung der Outputmenge 1 sind. Anders ausgedrückt: die Faktorintensitäten sind unabhängig von der Outputmenge x, denn im Einzelnen gilt

$$v_i(\boldsymbol{w},x) \;=\; x\partial c(\boldsymbol{w},1)/\partial w_i \quad \text{für alle} \quad i,$$

was für die Intensitäten sofort

$$(28) \quad \frac{v_i(\boldsymbol{w},x)}{v_j(\boldsymbol{w},x)} = \frac{\partial c(\boldsymbol{w},1)/\partial w_i}{\partial c(\boldsymbol{w},1)/\partial w_j}$$

impliziert. Offensichtlich ist die rechte Seite unabhängig von x.

7. Die Ausgabenfunktion (des Haushalts)

Der Einfachheit halber betrachten wir zunächst das Nachfragegebaren eines Haushalts, der über ein festes Einkommen y verfügt und seinen Nutzen maximiert. Die indirekte Nutzenfunktion (d.h. den maximal erreichbaren Nutzen) bezeichnen wir mit

$$(29) \quad u^*(\boldsymbol{p},y) = \max_{\boldsymbol{c}}\{f(\boldsymbol{c})|\boldsymbol{pc} \leq y\} = f(\boldsymbol{d}(\boldsymbol{p},y)).$$

Hierbei sind $f(\boldsymbol{c})$ die Nutzenfunktion, $\boldsymbol{c} = (c_1,\ldots,c_n)$ der Konsummengenvektor, $\boldsymbol{p} = (p_1,\ldots,p_n)$ der Güterpreisvektor und $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{p},y) = (d^1(\boldsymbol{p},y),\ldots,d^n(\boldsymbol{p},y))$ der Vektor der Nachfragefunktionen des Haushalts. $\boldsymbol{d}$ ist also die "Lösung" des Nutzenmaximierungsproblems. Zur besseren Kennzeichnung bezeichnet man $\boldsymbol{d}$ häufig als "Marshallsche Nachfrage" im Gegensatz zur "Hicksschen Nachfrage", die die "einkommenskompensierte Nachfrage" darstellt.

Das Problem (29) ist uns vorläufig zu schwierig und wir betrachten stattdessen zunächst einmal das einfachere Problem der Kostenminimierung eines Haushalts, der ein bestimmtes Nutzenniveau u erreichen will. In sichtbarer Analogie zum Kostenminimierungsproblem der Unternehmung definieren wir hier die sogenannte Ausgabenfunktion

$$(30) \quad e(\boldsymbol{p},u) = \min_{\boldsymbol{c}}\{\boldsymbol{pc}|f(\boldsymbol{c}) \geq u\} = \boldsymbol{pc}(\boldsymbol{p},u).$$

Hier ist e die Ausgabenfunktion und $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{p},u) = (c^1(\boldsymbol{p},u),\ldots,c^n(\boldsymbol{p},u))$ sind die Hicksschen Nachfragefunktionen, also die einkommenskompensierten Nachfragen.

Da sich dieses Problem (30) formal überhaupt nicht vom Problem der Kostenminimierung (24) unterscheidet, ist klar, daß die Ausgabenfunktion folgende Eigenschaften haben muß:

1. $e(\boldsymbol{p},u)$ ist konkav in $\boldsymbol{p}$. D.h. $e_{\boldsymbol{pp}}(\boldsymbol{p},u)$ ist negativ semi-definit.
2. $c(\boldsymbol{p},u) = e_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p},u)$. D.h. die Hickssche Nachfrage erhält man als Ableitung der Ausgabenfunktion nach $\boldsymbol{p}$. Im einzelnen gilt: $c^i(\boldsymbol{p},u) = \partial e(\boldsymbol{p},u)/\partial p_i$.

3. $c_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p}, u) = e_{\boldsymbol{pp}}(\boldsymbol{p}, u)$. D.h. die Substitutionsmatrix (für die Hickssche Nachfrage) ist gemäß 1. negativ semi-definit. Diese Substitutionsmatrix $c_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p}, u)$ sieht folgendermaßen aus:

$$c_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p}, u) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial c^1}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial c^1}{\partial p_n} \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial c^n}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial c^n}{\partial p_n} \end{bmatrix}.$$

   Folglich gilt insbesondere $\partial c^i / \partial p_i \leq 0$ für alle i.

4. $e(\gamma \boldsymbol{p}, u) = \gamma e(\boldsymbol{p}, u)$, d.h. e ist linear–homogen in den Preisen. Daraus folgt sofort, daß $e_{\boldsymbol{p}}$ $(= c(\boldsymbol{p}, u))$ homogen vom Grad Null in den Preisen ist. D.h. die Hicksschen Nachfragen $c^i(\boldsymbol{p}, u)$ hängen nur von den relativen Preisen ab. Denn aus $c^i(\gamma \boldsymbol{p}, u) = \gamma^0 c^i(\boldsymbol{p}, u)$ folgt mit $\gamma = 1/p_n$ – wir machen auf diese Weise das Gut n zum Numéraire – sofort in etwas ausführlicherer Schreibweise:

$$c^i\left(\frac{p_1}{p_n}, \frac{p_2}{p_n}, \ldots, \frac{p_{n-1}}{p_n}, 1, u\right) = \left(\frac{1}{p_n}\right)^0 c^i(p_1, \ldots, p_n, u).$$

   Klar, daß $(1/p_n)^0 = 1$ ist! Eine weitere Folge der Linear- Homogenität der Ausgabenfunktion ist (vgl. (22) auf Seite 6)

$$e_{\boldsymbol{pp}}(\boldsymbol{p}, u)\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0} \quad \rightarrow \quad c_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p}, u)\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0},$$

   d.h. die Hickssche Substitutionsmatrix $c_{\boldsymbol{p}}$ ist singulär.

Nun interessieren uns an sich weniger die Eigenschaften der Hicksschen Nachfragefunktionen $c^i(\boldsymbol{p}, u)$ als vielmehr die Eigenschaften der Marshallschen Nachfragefunktionen $d^i(\boldsymbol{p}, y)$. Durch einen Trick lassen sich beide verbinden.

Er besteht darin, daß man sich überlegt, daß $c^i(\boldsymbol{p}, u)$ und $d^i(\boldsymbol{p}, y)$ übereinstimmen müssen, wenn man das Einkommen y in $d^i(\boldsymbol{p}, y)$ gerade so festsetzt, daß sich damit das Nutzenniveau u in $c^i(\boldsymbol{p}, u)$ exakt erreichen läßt. D.h. setzen wir

$$(31) \quad y = e(\boldsymbol{p}, u),$$

so muß die Identität

$$(32) \quad \boldsymbol{c}(\boldsymbol{p}, u) = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{p}, e(\boldsymbol{p}, u))$$

gelten. Komponentenweises Differenzieren ergibt somit

$$\begin{aligned} \frac{\partial c^i(\boldsymbol{p}, u)}{\partial p_j} &= \frac{\partial d^i(\boldsymbol{p}, e)}{\partial p_j} + \frac{\partial d^i(\boldsymbol{p}, e)}{\partial y} \frac{\partial e(\boldsymbol{p}, u)}{\partial p_j} \\ &= \frac{\partial d^i}{\partial p_j} + \frac{\partial d^i}{\partial y} c^j = \frac{\partial d^i}{\partial p_j} + \frac{\partial d^i}{\partial y} d^j \qquad \text{(denn } c^j = d^j \text{ gemäß (33)).} \end{aligned}$$

Somit haben wir die *Slutsky*-Gleichungen

$$(33)\quad \frac{\partial d^i}{\partial p_j} \quad = \quad \frac{\partial c^i}{\partial p_j} - d^j \frac{\partial d^i}{\partial y} \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{d}_{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{d}\boldsymbol{d}_y.$$

Also: Gesamteffekt = Substitutionseffekt − Einkommenseffekt.

Bleibt noch festzustellen, daß man die rechte Seite von (33) ganz durch Ableitungen der Ausgabenfunktion ersetzen kann. Aus (32) erhält man $\boldsymbol{c}_u = \boldsymbol{d}_y e_u$ und somit $\boldsymbol{d}_y = \boldsymbol{c}_u / e_u$. Nun ist $\boldsymbol{c} = e_{\boldsymbol{p}}$ und somit $\boldsymbol{c}_u = e_{\boldsymbol{p}u}$. Also ist $\boldsymbol{d}_y = e_{\boldsymbol{p}u}/e_u$. Berücksichtigen wir weiter, daß gemäß (32) $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{c}$ und nach 2. oben $\boldsymbol{c} = e_{\boldsymbol{p}}$ ist, so können wir (33) auch äquivalent als

$$(34)\quad \boldsymbol{d}_{\boldsymbol{p}} = e_{\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}} - e'_{\boldsymbol{p}} e_{\boldsymbol{p}u}/e_u$$

schreiben. Zu betonen bleibt, daß $e(\boldsymbol{p}, u)$ jeweils genau an der Stelle zu evaluieren ist, an der (31) gilt.

[*V-MikroGrundlagen.TEX*]